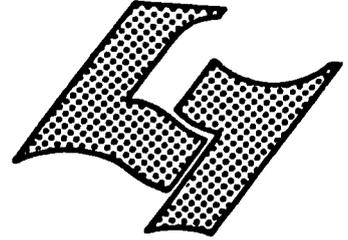


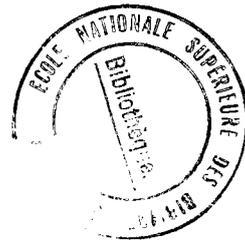
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON-I
43, Boulevard du 11 Novembre 1918
69621 VILLEURBANNE



Diplôme d'Etudes Supérieures Spécialisées

informatique documentaire

- * [REDACTED]
- * NOTE DE SYNTHESE



METHODES D'APPROXIMATION
DES SOLUTIONS FORTEMENT OSCILLATOIRES
D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

DESS
1981
7
A

AUTEUR : Florence Duval

DATE : 1981

SOMMAIRE

	<u>Page</u>
A - Méthodologie.....	2
1 - Le point de départ de la recherche documentaire.....	2
2 - La recherche documentaire.....	3
2.1 - La recherche des références bibliographiques	3
2.2 - L'interrogation de bases de données.....	4
a) L'interrogation de la base de données PASCAL	4
b) L'interrogation de la base de données INSPEC	7
2.3 - Analyse des résultats.....	8
3 - Conclusion.....	9
B - Méthodes d'approximation des solutions fortement oscillatoires d'équations différentielles.....	11
1 - Introduction.....	11
2 - Méthodes multiples.....	12
3 - Méthodes utilisant la théorie asymptotique.....	20
4 - Conclusion.....	31
5 - Références.....	33

A - Méthodologie

Cette première partie présente la recherche documentaire effectuée dans le cadre du DESS d'Informatique Documentaire de LYON I pour la réalisation de cette note de synthèse.

Les différentes étapes suivies et les moyens utilisés sont exposés ici, en particulier les interrogations des deux bases de données PASCAL et INSPEC qui ont pu être faites durant des travaux pratiques.

1 - Le point de départ de la recherche documentaire

Le sujet proposé par M.J Baranger du département de Mathématiques de LYON I était le problème fortement oscillatoire (the highly oscillatory problem), sans limitation à priori.

Ce thème ayant été assez peu fréquemment abordé si ce n'est durant la dernière décade, une limitation dans le temps ne s'imposait pas.

Les éléments de départ du travail documentaire étaient les suivants :

. un article de L. Auslander et W.L Miranker [3] qui permettait de situer le sujet, et trois références bibliographiques de cet article.

. des indications sur quatre articles à rechercher (nom des auteurs, date de parution supposée, titres de revues).

. des titres de revues de Mathématiques, générales ou spécialisées en Analyse Numérique ou Calcul Différentiel, qui pouvaient traiter le sujet. Ce sont :

"Numerische Mathematik", revue allemande en langue anglaise, et les revues américaines "Siam Journal of Numerical Analyse" et "of Applied Mathematics" et "of Mathematical Analysis", "Mathematics of Computation", "Russian Mathematical Surveys" qui présente des articles russes traduits en anglais, et le "Journal of Differential Equations".

2 - La Recherche Documentaire

2.1 - La Recherche des références bibliographiques

Elle s'effectua d'abord au travers de la consultation des sommaires des différentes revues de la bibliothèque du département de Mathématiques de LYON I. Ce qui n'apporta pas de références nouvelles, mais permit de compléter quelques unes de celles qui avaient été indiquées.

Le titre des articles ne suffisait d'ailleurs pas pour déterminer leur pertinence, le sujet étant plutôt abordé comme un cas particulier à l'intérieur des articles, souvent pour préciser que la méthode proposée était en défaut dans ce cas.

Les autres références furent complétées en consultant l'index du bulletin signalétique 110 du CNRS qui couvre le domaine de l'Analyse Numérique.

L'interrogation des bases de données PASCAL et INSPEC apporta de nouvelles références d'articles, en tout quinze articles furent sélectionnés. Six d'entre eux furent rejetés au vu de leur résumé dans le Bulletin Signalétique 110, soit parce qu'ils n'étaient pas en rapport avec le sujet, soit, pour quatre d'entre eux, parce qu'ils n'étaient disponibles qu'en langue russe.

Une des références trouvées était déjà connue, quinze références bibliographiques furent donc rassemblées à l'issue de la recherche.

Une étape intéressante fut l'interrogation des bases de données, et c'est ce point que nous abordons maintenant.

2.2 - L'interrogation de bases de données

Soulignons que ces interrogations ont pris place dans des exercices de travaux pratiques du DESS, par conséquent il a été permis de ne tenir compte d'aucune contrainte autre que le temps limité imparti à chaque élève, soit environ quinze minutes ce qui était suffisamment large.

a) Interrogation de la base de données PASCAL

Cette base de données multidisciplinaire est constituée par le CNRS/Informascience. Elle fut interrogée sur le réseau TRANSPAC avec le serveur QUESTEL-Télé systèmes dont l'ordinateur est situé au Parc International de Valbonne Sophia Antipolis. Le logiciel utilisé était le logiciel MISTRAL.

Exposons la stratégie adoptée et les équations de recherches correspondantes :

1°) Retrouver l'article de référence [3]
par le champ auteur :

?N

BASE CONNECTEE: PASCAL
PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 1

?/AU MIRANKER+

TERME MULTISENS MIRANKER+: 3
T1 MIRANKER G. S.
T2 MIRANKER W.
T3 MIRANKER W. L.
SELECTIONNER OU NON ?

?S T2,T3

1 RESULTAT 15
PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 2

L'auteur est W.L. Miranker, mais pour obtenir les documents dont les références ont pu subir une erreur de saisie le terme W. Miranker est aussi sélectionné.

2°) A partir de la référence de l'article, et des mots-clés qui le décrivent déterminer ceux qui vont être utilisés.

-4- 1502547 C.PASCAL
NO : 80-3-0103450
ET : ALGEBRAIC METHODS IN THE STUDY OF STIFF DIFFERENTIAL
EQUATIONS
CC : 110.A.06
FD : EQUATION DIFFERENTIELLE; SYSTEME EQUATION; EQUATION
SINGULIERE; SOLUTION OSCILLATOIRE

Equation différentielle et solution oscillatoire ont été retenus.

3°) Sélectionner les articles correspondant aux descriptions suivantes :

équation différentielle
solution oscillatoire
analyse numérique

... / ...

PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 2
?SOLUTION OSCILLATOIRE
2 RESULTAT 256
PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 3
?EQUATION DIFFERENTIELLE
3 RESULTAT 3831
PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 4
?2 ET 3
4 RESULTAT 205
PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 5
?ANALYSE NUMERIQUE
5 RESULTAT 1005
PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 6
?4 ET 5
TERME INCONNU 4 ET 5
6 RESULTAT 0
PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 6
?4 ET 5
6 RESULTAT 0
PROCEDURE, OU ETAPE DE RECHERCHE 6
?.VI ET 44 STDR

On peut être étonné de ne trouver aucune référence correspondant à ces trois mots-clés. La conjonction des deux premiers et du terme calcul numérique n'ayant donné aucun résultat non plus.

Finalement 205 articles ont été sélectionnés avec les descripteurs : équation différentielle et solution oscillatoire, les 25 plus récents furent édités.

Parmi ces références 4 furent retenues, 5 autres ayant été rejetées après consultation de leur résumé, le taux de pertinence est donc de 16 % pour cette interrogation.

b) Interrogation de la base de données INSPEC

INSPEC est une base de données spécialisée surtout dans les domaines de la Physique, l'Electronique et l'Automatique, qui rassemble un million et demi de références depuis 1971.

Le serveur était l'IRS (Service de Restitution de l'Information) de l'Agence Spatiale Européenne, son ordinateur est installé à Frascati près de Rome, et relié au réseau Transpac qui a permis l'accès à la base à partir du terminal de l'ENSB.

Le logiciel utilisé était le logiciel QUEST et l'interrogation fut faite en anglais.

La stratégie adoptée a été la suivante :

1°) Recherche de l'article [8] par le champ auteur.

? SAU=SNIDER?	1	138 AU=SNIDER?
? SAU=FLEMMING?	2	33 AU=FLEMMING?
? C1*2	3	(0) 1*2

Ce qui ne donna aucun résultat.

Précisons que l'orthographe du nom Fleming était incorrecte.

2°) Sélectionner les articles indexés par les termes :
équation différentielle, oscillation, numérique.

? SDIFFERENTIAL EQUATION?	4	5377 DIFFERENTIAL EQUATION?
? SOSCILLAT?	5	29875 OSCILLAT?
? C4*5	6	256 4*5
? SNUMERICAL?	7	22961 NUMERICAL?
? C7*6	8	(22) 7*6
? T8		

Les troncatures furent utilisées pour obtenir le maximum de descripteurs équivalents aux précédents.

3°) Sélectionner les références admettant pour descripteur ; fortement oscillatoire.

? S HIGHLY OSCILLAT?
S 3 HIGHLY OSCILLAT?

L'étape 2 restitua 22 références dont 18 furent éditées seulement, le temps d'interrogation alloué au DESS étant écoulé.

L'étape 3 en sélectionna 3 qui furent éditées, mais aucune ne fut retenue.

Curieusement l'article [1] qui porte explicitement la mention "highly oscillatory" dans son titre fut sélectionné à l'étape 2 mais pas à la dernière.

La référence de l'article [6] avait été restituée, ainsi que celle d'un article disponible en langue russe uniquement, d'où cette seconde interrogation permit de découvrir 4 références nouvelles en rapport avec le sujet. Le taux de pertinence est cette fois-ci de 17 %.

2.3 - Analyse des résultats

La plupart des articles furent trouvés à la bibliothèque du département de Mathématiques de LYON I, les autres à celle du département d'Informatique de Grenoble, et aux centres de documentation du CNRS et d'EDF à Paris.

La lecture des 15 articles récoltés mit en évidence deux familles distinctes traitant du sujet posé.

La première abordait le problème de l'approximation des solutions fortement oscillatoires de systèmes d'équations différentielles, et comprenait les articles de références.

La seconde traitait le problème des critères d'oscillation des solutions de tels systèmes sans aborder véritablement le problème des fortes oscillations. Elle se composait de cinq articles dont quatre d'entre eux avaient été sélectionnés lors de l'interrogation de la base PASCAL.

Les résultats obtenus menaient alors à deux développements du sujet trop différents. La première famille d'articles fut donc seule considérée, les articles étant plus nombreux et permettant d'obtenir une image assez complète des recherches et résultats concernant le problème de l'approximation des solutions fortement oscillatoires de systèmes d'équations différentielles.

3 - Conclusion

L'expérience de cette recherche documentaire a permis de mesurer la difficulté d'établir une description appropriée du sujet.

La plupart des articles finalement retenus entrent dans la classe "Equations et systèmes différentiels" du plan de classement du Bulletin Signalétique 110, alors que la classe "Interpolation - Approximation" avait paru plus en rapport avec le sujet traité ici au début de la recherche. Mais s'il faut bien entendu essayer de trouver la meilleure stratégie possible, c'est-à-dire les descripteurs et les équations les plus appropriés au thème de la recherche en lui-même, la simple adéquation au sujet ne suffit pas devant l'indexation des documents.

L'interrogation des bases de données qui a été exposée ici, met bien en évidence le problème d'interprétation que l'on rencontre.

Ayant sélectionné des références bibliographiques sur chacune des deux bases avec pratiquement la même stratégie et les mêmes équations, les articles restitués furent fort différents. La base PASCAL a donné des références d'articles orientés vers des critères d'oscillation, alors que la base INSPEC a donné des articles concernant le problème d'approximation traité dans les articles de références. Pourtant c'était précisément un de ces articles qui a servi au choix des mots-clés pour l'interrogation de la base PASCAL.

Il faut donc avoir une bonne connaissance de la base auquel on a accès, connaître sa personnalité en quelque sorte.

Pour finir, remarquons qu'il n'existe pas actuellement de base de données spécialisée en Mathématiques. Ce domaine est tout de même couvert en grande partie par des bases comme celles qui furent consultées, même si elle sont plutôt spécialisées en Biologie, Physique ou Chimie pour les domaines scientifiques de PASCAL ou en Physique, Electronique et Automatique pour INSPEC.

Ceci est à regretter car les facilités apportées par ces moyens informatiques à la recherche bibliographique, sont fort appréciables, même s'ils sont délicats à utiliser pour les raisons qui viennent d'être exposées, et si l'on peut regretter le manque d'actualité des fonds dû au délai nécessaire à l'indexation des documents et qui retarde de plusieurs mois l'accès à leurs références par les bases de données.

B - Méthodes d'approximation
des solutions fortement oscillatoires
d'équations différentielles

Cette dernière partie est le résultat de la recherche documentaire qui vient d'être décrite. Elle présente les différentes méthodes d'approximation adaptées au problème fortement oscillatoire qui sont exposées dans les articles rassemblés.

1 - Introduction

Depuis surtout une dizaine d'années le problème des fortes oscillations a attiré l'attention des scientifiques. En effet les modèles mathématiques utilisés en Chimie pour les situations physiques rencontrées dans les réactions cinétiques, ou dans la théorie des circuits électriques [9] par exemple, engendrent souvent des systèmes d'équations différentielles ordinaires dont les solutions sont fortement oscillatoires.

Le problème modèle peut se présenter comme le problème à valeur initiale suivant :

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

où le jacobien associé admet au moins une valeur propre dont la partie imaginaire est très grande.

t variant dans un intervalle fermé de \mathbb{R} contenant t_0 , x et f prenant leurs valeurs dans des espaces de la forme \mathbb{K}^n où \mathbb{K} est le corps des réels ou celui des complexes.

Remarquons que ce problème est souvent traité conjointement avec celui dit raide, où le jacobien possède au moins une valeur propre dont la partie réelle est importante et négative.

Les difficultés que l'on rencontre pour approcher les solutions de problèmes de ce type proviennent du fait qu'elles subissent de brusques variations. Mais si le problème traite d'une variation importante dans un intervalle de temps court, le problème fortement oscillatoire considère des solutions ayant une fréquence élevée et qui dans un petit intervalle de temps possèdent de très nombreuses variations.

Il en découle que les méthodes numériques classiques, algorithmes de Runge-Kutta par exemple, ne sont pas efficaces. Le pas d'intégration doit être extrêmement petit pour obtenir des résultats corrects, le temps de calcul est alors long donc coûteux, et finalement la variation elle-même peut être complètement masquée par des difficultés numériques comme les erreurs d'arrondi ou l'instabilité de la méthode, dès que l'on cherche à intégrer la solution sur un intervalle raisonnable.

On peut distinguer deux types de méthodes proposées pour pallier à ces inconvénients : les méthodes multipas [1], [2], [8], [10], et d'autres méthodes utilisant aussi des processus de moyenne [6] ainsi que des résultats de la théorie asymptotique [3], [4], [5], [7], [9].

2 - Méthodes multipas

Ces méthodes sont celles qui définissent les approximations x_m des valeurs $x(t_0 + mh)$ de la solution du problème modèle (1) par une relation de la forme :

$$x_{n+1} + \alpha_n x_n + \dots + \alpha_k x_{n+1-k} = h (\beta_0 x'_{n+1} + \beta_1 x'_n + \beta_k x'_{n+1-k})$$

pour $n = k-1, k, \dots$ (2)

où $x'_m = f(t_0 + mh, x_m) = f(t_m, x_m)$

$t_m = t_0 + mh$

Une fois les k valeurs initiales x_0, x_1, \dots, x_{k-1} connues, on peut obtenir successivement toutes les approximations x_m ($m \gg k$) désirées.

Il existe de nombreuses méthodes numériques utilisables pour l'intégration pas par pas d'équations différentielles ordinaires. On s'aperçoit que peu d'entre elles utilisent les propriétés spéciales de la solution qui peuvent être connues au préalable, comme dans le cas de solutions oscillatoires où les fréquences ou un substitut adéquat peuvent être connus.

Dans cet esprit D.G Bettis présente des algorithmes de Runge-Kutta modifiés de façon à ce que certaines solutions oscillatoires soient calculées sans erreur de troncature [2] .

L'auteur considère l'oscillateur harmonique simple $e^{i\omega t}$, solution de l'équation :

$$x' = i\omega x, \quad x(0) = 1 \quad (3)$$

et la formule de Runge-Kutta de niveau $p + 2$ suivant

$$x(h) = 1 + (i\omega h) \sum_{k=0}^{p+1} c_k + (i\omega h)^2 \sum_{k=1}^{p+1} c_k \sum_{j=0}^{p+1} \beta_{kj} + (i\omega h)^3 \sum_{k=1}^{p+1} c_k \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{kj} \sum_{l=0}^{j-1} \beta_{jl} + \dots \quad (4)$$

Reprenant le principe des algorithmes de Runge-Kutta qui est d'obtenir une approximation de la solution équivalente à une série de Taylor de cette solution, les coefficients des puissances $(i\omega h)^k$ dans l'expression (4) sont identifiés

à $1/k!$ pour $0 \leq k \leq p$
 et à $\mu_k = 1/k + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j (h)^{2j}}{(k+2j)}$ pour $p+1 \leq k \leq p+2$

Les coefficients c_k et β_{kj} sont alors déterminés par le système qui découle de ces conditions.

En illustration, les coefficients sont calculés pour des niveaux trois et quatre.

Ces algorithmes qui permettent de résoudre exactement l'équation (3) se sont montrés efficaces lors d'expériences numériques pour la classe des équations différentielles qui possèdent des éléments fortement oscillatoires dus à des valeurs propres dont la partie réelle est petite.

Adoptant le même point de vue d'une démarche dépendant du système abordé et de sa solution, W.L Miranker et G. Wahba décrivent une méthode originale utilisant un processus de prise de moyenne (averaging) tout en conservant une forme multipas [6] .

L'idée exposée consiste à remplacer les fonctionnelles par points qu'utilise habituellement l'Analyse Numérique par des fonctionnelles stables des solutions fortement oscillatoires d'équations différentielles, dans une méthode multipas (2).

Considérant l'équation différentielle du second degré :

$$x'' + \lambda^2 x = \lambda^2 \sin t$$

sa solution qui est

$$x(t) = a \sin \lambda t + \sin t / (1 + 1/\lambda^2)$$

remplit pratiquement tout l'espace, il apparaît donc que vouloir approcher la valeur de cette fonction à un point donné est un problème mal posé, ou plutôt mal conditionné ou instable.

Revenant au problème modèle (1) le principe de leur méthode consiste à rechercher deux fonctionnelles :

- 1°) l'une correspondant à x_n (i.e est une description acceptable de la solution)
et que l'on recherche aux points t_k de la subdivision

2°) une autre correspondant à

$x'_n = f(x_n, t_n)$ (i.e qui exprime les contraintes sur la solution) et que l'on peut calculer aux points t_k .

L'appliquant à l'équation scalaire

$$x'' + h^2 x = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

où x et f sont scalaires

et $t \in [-h\Delta, T]$

Les fonctionnelles choisies sont :

$$1^\circ) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(t-s) x(s) ds$$

$$\text{où} \quad k(z) = \frac{1}{\Delta} \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < z < \Delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est la moyenne de la solution x considérée sur l'intervalle $[t-\Delta, t]$

$$2^\circ) \quad z(t) = (d^2/dt^2 + \lambda^2) x(t) = f(t, x(t))$$

L'expression de la formule multipas obtenue est alors :

$$y_n = \sum_{i=1}^r c_i y_{n-i} + h^2 \sum_{i=0}^s d_i f_{n-i}$$

les notations étant :

$$y_n = x(t_n)$$

$$f_n = z(t_n)$$

Des conditions sont définies sur les coefficients pour établir la stabilité de la méthode, et six exemples de calcul des coefficients sont donnés.

Ils dépendent du paramètre λ^2 i.e du problème, ce qui correspond au point de vue adopté. Cela peut paraître plus restrictif, mais la dépendance dans la méthode exposée n'apparaît que dans la détermination des coefficients et l'analyse de l'erreur, alors que dans les cas classiques cela entre dans l'analyse de l'erreur et aussi l'utilisation de la méthode du fait de l'approche de x'_n par $f(t_n, x_n)$.

Cependant le choix des fonctionnelles reste très large et ne peut être caractérisé davantage que cela a pu être fait.

Se plaçant dans le cas où les fréquences sont connues, Gautschi [10], Snider et Fleming [8] présentent deux méthodes utilisant ce facteur et qui sont fort différentes.

Gautschi a proposé en 1961 un algorithme exact pour des polynômes algébriques ou trigonométriques jusqu'à un degré défini par le type de polynôme.

Considérant le problème modèle (1) pour une fonction f continument dérivable, l'auteur démontre l'existence de 2 méthodes multiples trigonométriques d'ordre p cf (2) dont les coefficients β dépendent du paramètre $v = 2\pi h/T$, ceci pour v suffisamment petit.

L'une nécessitant $2p$ valeurs initiales et telle que $\beta_0 = 0$, l'autre admettant seulement $2p - 1$ valeurs initiales.

Les coefficients sont déterminés de façon à ce que la fonctionnelle linéaire associée à la méthode par :

$$L(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x(t_0 + (n+1-k)h) - h\beta_k x'(t_0 + (n+1-k)h)$$

et $\alpha_0 = 0$

vérifie : $\forall r \in \{1, 2, \dots, p\} \quad L(\cos(2\pi rt/T)) = L(\sin(2\pi rt/T)) = 0$

où T est la fréquence de la solution que l'on cherche à approcher.

En application, ces coefficients sont déterminés pour les méthodes d'interpolation d'Adam, et de Störmer dans le cas particulier d'une équation différentielle du second degré. Des exemples numériques montrent l'intérêt de cette méthode, mais l'inconvénient majeur reste la connaissance ou l'estimation de la fréquence des solutions.

Ces méthodes se ramènent aux méthodes classiques d'interpolation algébrique d'ordre $2p$ lorsque $T \rightarrow +\infty$, les problèmes de fiabilité se posent donc surtout quand on sous-estime la période T .

La condition nécessaire qui est que $(2\pi h/T)$ soit suffisamment petit, oblige le pas d'intégration h à être relativement petit dans le cas qui nous intéresse, ce qui nécessite un nombre de points de données $x(t_0 + m h) = x_m$ important.

C'est précisément ce dernier inconvénient que Snider et Fleming ont essayé d'éliminer [8].

Ils abordent ce problème dans le cas de l'analyse de Fourier d'une fonction périodique f , et proposent une réduction notable des points de données nécessaire lorsque f est la somme d'une fonction régulière et de quelques harmoniques à hautes fréquences connues, pour le calcul du n -ième coefficient de Fourier de la fonction f .

La méthode repose sur la substitution (aliasing) de fréquences moins élevées aux hautes fréquences connues des quelques harmoniques contenus dans f .

Les auteurs procèdent de la façon suivante. Supposant que f ait une période de 2π et soit de la forme :

$$f(t) = h(t) + \sum_{m=1}^{p'} c_m \cos R_m t + d_m \sin R_m t$$

où :

$$h(t) = a'_0/2 + \sum_{r=1}^{+\infty} a'_r \cos rt + b'_r \sin rt$$

et qu'il existe une constante L vérifiant :

$$\forall m \in \{1, 2, \dots, p\} \quad R_m > L$$

$$\forall r > L \quad a'_r, b'_r \text{ sont négligeables.}$$

On choisit alors un entier N , $R_1 > N$, tel que toutes les fonctions trigonométriques associées aux fréquences $r = 0, 1, \dots, L-1$, R_1, \dots, R_p soient orthogonales entre elles.

Ceci impliquant qu'on ait : $N \geq L + p$

Remarquant que la fonction $\cos(2 \frac{\pi}{q} N + r) t$, par exemple, prend les mêmes valeurs que $\cos r t$ aux points $t_k = k \cdot 2 \pi / 2 N$, $k = 0, \dots, 2 N$, toute fonction $\cos R_m t$ peut alors être remplacée par $\cos r_m t$ pour un certain r_m tel que $r_m \leq N$ (en même temps qu'elle varie plus vite entre deux de ces points).

En illustration, si f contient trois harmoniques de fréquences respectives 177, 589 et 1 000, pour évaluer l'amplitude de ces harmoniques les méthodes classiques auraient nécessité au moins 2 001 points donnés, les auteurs obtiennent le résultat cherché avec $N = 52$, soit 105 points donnés. L'erreur obtenue est de l'ordre des premiers termes a'_{L+1} et b'_{L+1} qui ont été négligés.

En application, ils considèrent le système :

$$y' = -D y + g(y, t) \quad (5)$$

où D est une matrice constante et g une fonction oscillatoire (ou variant faiblement).

En utilisant l'approximation g_k de g par une interpolation trigonométrique (polynomiale) d'ordre k et un facteur d'intégration, la solution du système (5) est estimée par :

$$y_{n+1} = \exp(-Dh) y_n + \exp(-Dx_{n+1}) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \exp(Dx) g_k(x) dx$$

qui peut être évaluée explicitement, et se prêter aux calculs exposés plus haut.

Ceci paraît tout à fait adapté à un problème fortement oscillatoire. Il faut cependant que les fréquences utilisées dans g_k soient entières ou au moins rationnelles, et cette méthode n'est pas automatique à démarrer.

Comme on l'a vu un point important est le choix de N , malheureusement aucune solution simple n'est apportée : les auteurs proposent un algorithme basé sur un processus d'essai-correction donnant la meilleure estimation de N .

Autre inconvénient de cette méthode, son efficacité repose précisément sur la prévision des fréquences qui seront importantes, celles-ci ne devant pas être trop nombreuses.

Considérant cette fois le problème modèle (1) sous des conditions générales ($t_0 = 0$), S.O Fatunla traite conjointement les problèmes raides et fortement oscillatoires.

Il propose deux formules numériques d'intégration à un pas et d'ordre quatre qui possèdent les caractéristiques adéquates de stabilité et de convergence pour convenir à ces deux cas.

Les formules proposées sont du type :

$$x_{n+1} = x_n + R f(t_n, x_n) + S f'(t_n, x_n)$$

et sont obtenues à partir de chacune des deux fonctions d'interpolation :

$$\tilde{F}(t) = (I - e^{\Omega t})A - (I - e^{-\Omega' t})B + C$$

A, B, C étant des vecteurs de \mathbb{R}^m

$$\tilde{\tilde{F}}(t) = (I - e^{\Omega t})A - (I - e^{\bar{\Omega} t})\bar{A} + B$$

A, B sont des vecteurs de \mathbb{C}^m

Ω , Ω' étant des matrices diagonales oscillatoires ou raides.

Les paramètres R et S sont calculés en fonction des trois premières dérivées de f, l'auteur indique la procédure nécessaire pour les déterminer ainsi qu'une estimation de l'erreur pour chacune de ces formules explicites, qui s'avèrent donc être d'ordre quatre.

Six exemples numériques qui comparent les deux méthodes avec en particulier celles de C.W Gear et J.D Lambert (qui s'adressent au problème raide surtout) montrent qu'elles paraissent intéressantes dans le cas que nous traitons ici.

En effet elles demandent un pas d'une taille correctement grande et gardent un bon degré de précision, il est d'ailleurs possible de varier la taille du pas dans le cas d'un seuil de tolérance imposé à l'erreur asymptotique.

Le principal inconvénient reste la nécessité de générer des dérivées d'ordre supérieur.

3 - Méthodes utilisant la théorie asymptotique

Les méthodes décrites dans cette partie correspondent au problème à valeurs initiales :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{dt} &= A(t, \varepsilon)x + H(t, \varepsilon) + \varepsilon G(t, x, \varepsilon), \\ x(0) &\text{ donné.} \end{aligned}$$

où ε est un paramètre réel petit.

Lorsque ε est proche de zéro, la solution de cette équation est fortement oscillatoire, et c'est ce facteur qui est exploité dans les articles qui vont être présentés, où la solution est recherchée sous la forme :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^n x_n$$

pour un certain entier n.

Les méthodes proposées utilisent aussi des processus de moyenne qui permettent d'essayer d'approcher la solution à un instant quelconque. Exceptée celle développée par A. Nadeau, J. Guyard et M.R Feix dans le cadre du calcul de la solution d'un oscillateur harmonique faiblement perturbé qui ont précisément éludé les problèmes analytiques que ces moyens soulèvent en recouvrant à un plan numérique [7] .

Ils traitent de la solution de l'équation :

$$x'' + x = \varepsilon f(t, x, x')$$

où ε est un petit paramètre réel.

dans le cas où la déviation par rapport à celle de l'équation $x'' + x = 0$ est importante.

Leur méthode dite à pas géant ou algébro-numérique utilise le traitement de perturbation de Poisson qui permet d'obtenir la solution sous la forme :

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (6)$$

En identifiant les termes de même puissance en ε , on résoud successivement les équations :

$$x_0'' + x_0 = 0$$

$$x_1'' + x_1 = f(t, x_0, x_0')$$

Le point principal étant que les conditions initiales à $t_0 = 0$ par exemple sont absorbées par la solution d'ordre zéro x_0 :

$$x_0(0) = x(0) \quad \text{et} \quad x_n(0) = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 0$$

$$x_0'(0) = x'(0) \quad \text{et} \quad x_n'(0) = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 0$$

Ce traitement est combiné avec un processus de réinitialisation qui consiste à choisir un pas de temps H tel que $H \ll 1$ et à construire un nouvel ensemble de fonctions $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \dots$ en posant $\tilde{x}_0(H) = x(H)$ et $\tilde{x}'_0(H) = x'(H)$.

Composant ainsi une nouvelle série de perturbation à déterminer avec le procédé décrit plus haut.

L'ordre des séries ainsi construites correspond à la précision voulue pour l'approximation de la solution.

Ceci permet de traiter les termes non bornés à l'infini contenus dans les séries issues de (6) d'une façon numérique, sans avoir à résoudre numériquement $x'' + x = 0$ ce qui obligerait à choisir un pas de temps $h \ll 1$. On peut donc ainsi mener le travail analytique à des ordres élevés tout en conservant un pas d'intégration à une valeur relativement grande, comparativement à une méthode purement numérique.

Un avantage est qu'en variant le pas géant H la convergence des résultats est contrôlée, cependant ce dernier est lié à l'ordre de perturbation des séries construites et par conséquent si on veut l'augmenter il faut trouver un compromis entre sa taille et la complexité des calculs algébriques.

Cependant il est fondamental que la chaîne d'équations soit résolue ce qui implique pour la fonction f ou d'avoir une expression simple ou de se développer en une série simple. Cette méthode est testée sur l'équation de Mathieu, pour des équations plus complexes il faudrait sans doute recourir à des langages de manipulation de formule (cf. FORMAC).

Cette méthode se présente comme un intermédiaire entre les algorithmes purement numériques et purement analytiques, desquels elle diffère essentiellement par son processus de réinitialisation.

Nous abordons maintenant une série d'articles qui abordent le problème fortement oscillatoire avec des moyens analytiques utilisant eux des résultats de perturbations et des méthodes multitemps semblables à la méthode de moyenne de Bogoliuboff.

F. Hoppensteadt et W.L. Miranker [9] abordent au travers des modèles de circuits contenant des transistors et des diodes des équations différentielles dont les solutions comportent des éléments fortement oscillatoires, et considèrent le problème modèle :

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (A + \varepsilon B) x \quad (7)$$

où $t \in [0, T]$ et ε est un petit paramètre.

A et B étant deux matrices carrées $n \times n$ et x un vecteur de \mathbb{K}^n .

Par le changement de variable : $\tau = \varepsilon t$

le système (1) est ramené au système

$$\frac{du}{d\tau} = (A + \varepsilon B) u$$

avec $u_0 = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r \varepsilon^r$, $\tau \in [0, T/\varepsilon]$ comme conditions initiales,

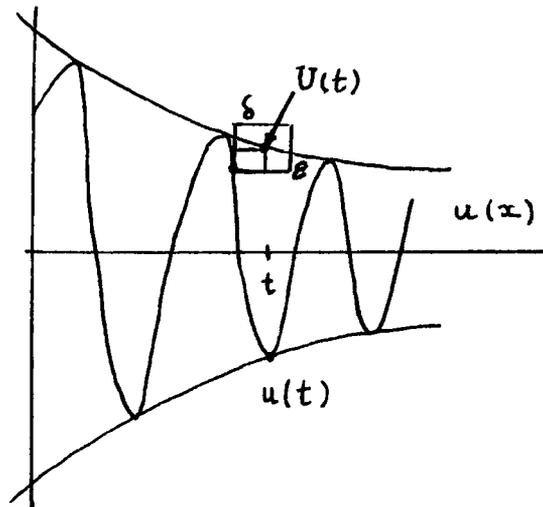
la solution étant recherchée sous la forme $u = \sum_{r=0}^{+\infty} u_r(t, \tau) \varepsilon^r$.

La notion d'approximation numérique usuelle ne peut s'appliquer au cas fortement oscillatoire, puisque les trajectoires des solutions ne sont pas décrites correctement par un ensemble de points admettant ses valeurs à un certain pas de temps.

Les auteurs définissent une autre notion d'approximation; pour $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ donnés $U(t)$ est une approximation numérique selon (ε, δ) si :

$$\exists \tau \quad |\tau| \leq \delta \quad \text{et} \quad |U(t) - u(t)| \leq \varepsilon$$

Le schéma suivant donne un exemple d'une telle approximation :



D'après cette définition et sous l'hypothèse notamment que A est diagonale qui permet d'établir l'existence de la moyenne

$$\bar{B} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^{-1}(s) A \varphi(s) ds$$

où φ est la solution de l'équation :

$$d\varphi/dr = A \varphi, \quad \varphi(0) = 1 \quad (8)$$

l'algorithme de résolution suivant est proposé :

- 1°) résoudre l'équation (2) avec une méthode numérique automatique de pas h.
- 2°) calculer \bar{B} avec la formule de quadrature

$$\bar{B} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N c_h \varphi^{-1}(jh) A \varphi(jh)$$

N est déterminé par la précision choisie pour l'estimation de \bar{B} et $\varphi(jh)$ est la valeur de la fonction φ définie précédemment au point jh de la subdivision utilisée alors.

3°) résoudre avec une méthode numérique automatique l'équation :

$$d\tilde{v}_0/dt = B \tilde{v}_0, \quad \tilde{v}_0(0) = a_0$$

4°) calculer l'approximation (au sens précisé plus haut)

$$u_0(t', Nh) = \varphi(Nh) \tilde{v}_0(t')$$

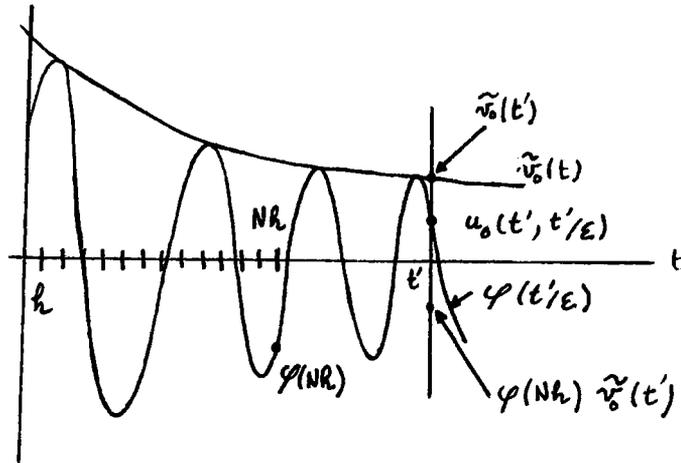
de la solution du problème modèle (7) au point t' .

Ce résultat peut être amélioré en additionnant à $\tilde{v}_0(h)$, avant la multiplication par $\varphi(Nk)$ dans l'étape 4, le terme $\varepsilon v_1(t', t'/\varepsilon)$ défini par les équations :

$$\begin{cases} v_1(t, \varepsilon) = \tilde{v}_1(t) - \varepsilon \bar{B} - \int_0^T B(s) ds \tilde{v}_0(t) \\ d\tilde{v}_1/dt = \bar{B} \tilde{v}_1 + \bar{R}_1(t) \end{cases}$$

où $\bar{R}_1(t) = (\bar{B}\rho - \rho\bar{B}) v_0(t)$

La figure ci-dessous schématise ces calculs.



Reprenant des méthodes similaires, F C Hoppensteadt [5] établit une description asymptotique des solutions du système faiblement linéaire :

$$\begin{cases} dx/d\tau = \varepsilon F(\tau, t, x, y, \varepsilon), & x(0) = \xi(\varepsilon) \\ dy/d\tau = A(\tau) y + \varepsilon G(\tau, t, x, y, \varepsilon), & y(0) = \eta(\varepsilon) \end{cases} \quad (9)$$

où $t = \varepsilon \tau \in [0, T]$

La matrice fondamentale φ est cette fois définie par l'équation :

$$d\varphi/d\tau = A(\tau) \varphi, \quad \varphi(0) = 1$$

Les fonctions F et G sont décomposées chacune en la somme d'une fonction dépendant du paramètre ε et d'une fonction indépendante de ε , ces dernières fonctions étant notées respectivement F_0 et G_0 .

Elles vérifient que les limites

$$Q\bar{G}_0(t, x, Qy) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q \varphi^{-1}(s) QG_0(s, t, x, \varphi(s) Qy) ds$$

et

$$\bar{F}_0(t, x, Qy) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_0(s, t, x, \varphi(s) Qy) ds$$

existent, et sous certaines conditions de régularité de toutes ces données, l'existence d'une solution unique au problème (9) est démontrée. Et l'on a :

$$\begin{cases} x(\tau, \varepsilon) = x_0(t) + O(\varepsilon) \\ Py(\tau, \varepsilon) = P\varphi(\tau) P\eta + O(\varepsilon) \\ Qy(\tau, \varepsilon) = Q\varphi(\tau) Qy_0(t) + O(\varepsilon) \end{cases}$$

Sous l'hypothèse que x_0 existe et est la solution unique de l'équation :

$$\begin{aligned} dx_0/dt &= \bar{F}_0(t, x_0, Qy_0), \quad x_0(0) = \xi(0) \\ t &\in [0, T] \end{aligned}$$

et que y_0 existe et est l'unique solution de :

$$\begin{aligned} (d/dt) Qy_0 &= Q\bar{G}_0(t, x_0, Qy_0) \\ t \in [0, T], \quad Qy_0(0) &= Q\eta(0) \end{aligned}$$

P et Q sont deux projecteurs de l'espace considéré , P sélectionnant dans $\varphi(\varepsilon)$ les modes qui dégènèrent rapidement et Q ceux qui sont oscillatoires.

Tout naturellement, le cas oscillatoire est celui où $Q = I$ et $P = 0$, et le résultat précédent prend la forme :

$$\begin{cases} x(r, \varepsilon) = x_0(t) + o(\varepsilon) \\ y(r, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon) [y_0(t) + o(\varepsilon)] \end{cases}$$

La caractéristique majeure de cette approximation est le fait que le facteur $\varphi(\varepsilon)$ peut être retiré du terme de l'erreur $o(\varepsilon)$.

Cette dernière propriété est exploitée par L. Auslander et W.L Miranker, dans le cas du système linéaire (7), pour déterminer la moyenne \bar{B} au moyen de constructions algébriques inspirées de la théorie des groupes de Lie [3] .

Considérant le problème (7) lorsque A est une matrice oscillatoire (i.e semblable à une matrice diagonale dont toutes les valeurs propres sont imaginaires), sa solution admet la représentation asymptotique suivante :

$$x(t) = e^{At/\varepsilon + Bt} = e^{At/\varepsilon} e^{\bar{B}t} (1 + o(\varepsilon))$$

Cette représentation est de la même forme qu'en [6] pour le cas oscillatoire.

Etant donnés les deux opérateurs ad et Ad définis par :

$$g \in Gl(n), X \in E(n) : ad(g)(X) = gXg^{-1}$$

$$X, Y \in E(n) : Ad(X)(Y) = [X, Y] = XY - YX$$

où $E(n)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbf{IK} et $GL(n)$ est le groupe des matrices inversibles de $E(n)$.

$$\text{Alors } \bar{B} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \text{ad}(\exp(tA))B dt$$

et si S est le sous-espace engendré par l'intégrant, S admet une base V_0, V_1, \dots, V_N de la forme :

$$\begin{aligned} V_0 &= B \\ V_R &= \text{Ad}(A) V_{R-1} \end{aligned}$$

C'est-à-dire que S est le sous-espace cyclique engendré par $\text{Ad}(A)$ et le vecteur B .

Et si $V_{N+1} = \sum_{i=0}^N a_i V_i$, \bar{B} est déterminé par la valeur du coefficient a_0 de B :

- . Si $a_0 \neq 0$ alors $\bar{B} = 0$
- . Si $a_0 = 0$, il existe un vecteur W unique, à la multiplication par un scalaire près, et non nul qui vérifie :

$$\begin{aligned} \text{Ad}(A)(W) &= 0 \\ \bar{B} &= -\frac{W}{b_0} \text{ où } W = \sum_{i=0}^N b_i V_i \end{aligned}$$

En fait, \bar{B} est la projection de B sur $\text{Ker Ad}(A)$ parallèlement à $\text{Im Ad}(A)$.

Cette méthode est appliquée au système canonique mécanique :

$$M_{\mathbf{q}''} + C_{\mathbf{q}} = 0$$

De plus une méthode de préconditionnement de A , qui consiste à la bloc-diagonaliser, est présentée, permettant de déterminer \bar{B} facilement d'après le résultat qui a été établi.

Un autre développement de l'article [5] , est la méthode des enveloppes de M. Van Veldhuizen et W.L Miranker [4] qui aborde le problème non linéaire défini par l'équation différentielle :

$$dx/dt = A x/\varepsilon + g(t,x) , x(0) = x_0 \quad (10)$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ε étant toujours un petit paramètre positif, $t \in [0, T]$

Ce système est très représentatif du cas fortement oscillatoire traité dans ce troisième chapitre puisque sa solution admet de l'ordre de $2\pi/\varepsilon$ oscillations par unité de temps.

Cette méthode est très liée et généralise plusieurs des attaques au problème de calcul qui nous intéresse ici.

La solution est recherchée sous la forme d'une série de Fourier :

$$u(t, \tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{ip\tau} u_p(t)$$

après qu'une première transformation analogue aux précédentes ait introduit la variable de temps lente τ

Les fonctions en τ , $e^{ip\tau}$ sont appelées porteuses (carriers) et les coefficients u_p , fonctions de t , enveloppes.

Le plan de calcul adopté consiste à déterminer des approximations numériques à un nombre fini de ces enveloppes.

Pour cela les termes u_p sont définis par la résolution d'un système d'équations du type : $dy/dt + By/\varepsilon = f(t)$ (11)

et les auteurs introduisent la notion de solution régulière d'ordre k , y_k d'une telle équation :

$$y_k = \varepsilon B^{-1} f - \varepsilon^2 B^{-2} f' + \dots + (-1)^k \varepsilon^{k+1} B^{-(k+1)} f^{(k)}$$

y_k n'est pas en général une solution de l'équation (11) cependant c'est une valeur approchée à $O(\epsilon^k + 2)$ près de la solution de cette équation. Les enveloppes sont estimées en utilisant cette propriété.

Ensuite une méthode de démarrage automatique, qui revient à la discrétisation des équations définissant les enveloppes, combinée à une méthode multipas permettent d'obtenir une approximation de la solution $x(t)$ du système (10) de la forme :

$$\varphi(t/\epsilon) \sum_{|p| \leq d} e^{ipt/\epsilon} u_p^h(t)$$

La fonction φ étant définie comme dans l'article [9] par l'équation (8).

Deux algorithmes sont décrits pour générer les enveloppes, et l'unicité de la solution obtenue par ce plan de calcul est démontrée avec celle de chacun des termes u_p^h dérivant des enveloppes u_p .

L'analyse de l'erreur donne une estimation de l'erreur locale ou globale dépendant de ϵ , du pas d'intégration adopté, de l'erreur due aux transformations et d'autres paramètres, ainsi qu'un résultat de superconvergence et de stabilité par rapport aux perturbations des données initiales. Ceci sans réduire le rapport ϵ/h , et en le faisant on peut obtenir des caractéristiques de stabilité par rapport aux erreurs d'arrondi.

Sur l'exemple non linéaire simple :

$$\begin{cases} d^2 z/dt^2 + z/\epsilon^2 = e^{-t}/\epsilon^2 & \epsilon > 0 \\ z(0) = 1 + 1/1 + \epsilon^2 \\ z'(0) = -1/1 + \epsilon^2 \end{cases}$$

les calculs vérifient la plupart des comportements théoriques prévus.

Un des mérites principaux de cette méthode paraît être la précision pour le problème non linéaire, mais la complexité de la démarche à suivre est sans doute un handicap pour les applications pratiques d'une telle méthode.

3 - Conclusion

Les méthodes qui viennent d'être décrites sont assez variées, comme on aura pu le constater. En effet le problème posé par les fortes oscillations des fonctions que l'on cherche à approcher est fort complexe : il s'agit de trouver un équilibre entre une précision correcte de la méthode d'approximation, un coût de calcul acceptable donc un pas d'intégration relativement large, et des hypothèses de départ ne restreignant pas trop le problème traité.

Le principal inconvénient des méthodes numériques classique est précisément la nécessité de choisir un pas très petit pour obtenir une précision correcte, d'où des calculs coûteux et l'accumulation d'erreurs d'arrondi ou dues à l'instabilité de la méthode, et le nombre élevé de points de données.

Chacune des méthodes exposées essaie de prévenir ces difficultés, mais en suscite d'autres : la nécessité de calculer des dérivées d'ordre supérieur [1] , la connaissance au préalable des fréquences des solutions du système considéré [10] , avec éventuellement des restrictions sur ces fréquences (au moins rationnelles) [8] , ou la connaissance de la solution elle-même [2] et [6] .

Elles présentent aussi souvent une partie délicate dans l'analyse du problème comme c'est le cas pour le choix du N optimal dans l'article [8] , le choix des fonctionnelles adéquates [6] , ou l'estimation des fréquences [10] et [8] .

Les plans numériques développés d'après la théorie asymptotique, paraissent intéressants dans la mesure où ils traitent d'une classe générale de problèmes fortement oscillatoires, mais ils recourent parfois à un nombre important de transformations rendant complexe leur utilisation [4]. L'article [7] présente néanmoins une méthode qui évite ce genre de difficultés en ne recherchant pas à obtenir une approximation à un moment quelconque, mais elle restreint son domaine d'application à des problèmes relativement simples.

Le choix des méthodes à utiliser est donc dicté par les caractéristiques du problème à traiter et les priorités accordées à la précision ou le coût des calculs. On doit cependant regretter que la majorité des méthodes proposées n'ait pas été véritablement testée pour des problèmes oscillatoires variés, et n'ont donc pas pu encore faire leurs preuves numériques.

Références

- 1 - Numerical integrators for stiff and highly oscillatory differential equations.
S. O FATUNLA
Mathematics of Computation (USA), V 34, n° 150, p. 373-390,
Avril 1980.
- 2 - Runge-Kutta algorithms for oscillatory problems.
D.G BETTIS
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (CH), V 30,
n° 4, p. 699-704, 25 juillet 1979.
- 3 - Algebraic methods in the study of stiff differential equations.
L. AUSLANDER, W.L MIRANKER
Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems Conference/
1978-05-30/Nimègue, London : Academie Press (GB) p. 3-23, 1979.
- 4 - The method of envelopes.
W.L MIRANKER, M. VAN VELDHUIZEN
Mathematics of Computation (USA), V 32, n° 142, p. 453-496,
Avril 1978.
- 5 - Differential equations having rapidly changing solutions :
analytic methods for weakly non linear systems.
F.C HOPPENSTEADT, W.L MIRANKER
Journal of Differential Equations (USA), V 22, p. 237-249, 1976.
- 6 - An averaging method for the stiff highly oscillatory problem.
W.L MIRANKER, G. WAHBA
Mathematics of Computation (USA), V 30, n° 135, p. 383-399,
Juillet 1976.
- 7 - Algebraic-numerical method for the slightly perturbed harmonic
oscillator.
A. NADEAU, M.R FEIX, J. GUYARD
Mathematics of Computation (USA), V 28, n° 128, p. 1057-1066,
Octobre 1974.

- 8 - Approximation by aliasing with application to "Certaine" stiff differential equations.
A.D SNIDER, G.C FLEMING
Mathematics of Computation (USA), V 28, n° 126, p. 465-473,
Avril 1974.
- 9 - Numerical methods for stiff systemes of differential equations related with transistors, tunnel diodes, etc...
F. HOPPENSTEADT, W.L MIRANKER
Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Berlin
New-York, p. 413-432, 1974.
- 10 - Numerical interpolation of ordinary differential equations based on trigonometric polynomials.
W. GAUTSCHI
Numerische Mathematik (RFA), V 3, p. 381-397, 1961.

